Lineární algebra srozumitelně
(Netradiční výukový materiál pro kurzy lineární algebry)

Ľubomíra Balková

lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz

Se soustavami lineárních algebraických rovnic (LAR) se setkáváme už v elementární matematice. Tam jde ovšem jen o soustavy o malém počtu rovnic a neznámých (2×2, maximálně 3×3). Např. Najdi reálná x a y tak, aby

$$\begin{array}{ccccc} 3x & + & 2y & = & 5, \\ 7x & + & 6y & = & 4. \end{array}$$

Poznamenejme, že číslům $3, 2, 7, 6$ se říká *koeficienty* a $5, 4$ tvoří *pravou stranu* soustavy, x a y jsou *neznámé*. Takové elementární soustavy řešili již staří Babyloňané a Egypťané 4000 př.n.l. Číňané 2000 let př.n.l. vyvinuli nápaditou metodu podobnou Gaussově eliminaci pro malé soustavy a uměli si poradit i se zápornými čísly v mezivýpočtech. Tento algoritmus se ale kvůli izolovanosti Číny nerozšířil. V 7. stol. Brahmagupta definuje nulu a operace s ní, takže od té doby se v soustavách LAR objevují i záporné koeficienty a výsledky. Ještě v 17. stol. neexistuje systematický algoritmus řešení soustav LAR, umějí se řešit substitucí a eliminací pouze soustavy se stejným počtem rovnic a neznámých a navíc jen takové, které mají řešení jediné. V roce 1750 přichází Cramer s elegantním pravidlem pro hledání řešení soustav, založeným na práci s determinanty, a Euler si jako první uvědomuje, že soustavy LAR nemusí mít jediné řešení. Konečně roku 1811 navrhuje Gauss eliminační schéma, které umožňuje nacházet systematicky řešení soustav. Kolem roku 1850 vstupují na scénu díky Caleymu matice a konečně pak pomocí pojmu hodnost matice podává Frobenius kompletní popis řešení soustav LAR pro jakýkoliv počet neznámých a rovnic.

Řešení soustav LAR bude jen odrazovým můstkem naší práce. Postupně se seznámíme s rozmanitými partiemi lineární algebry a ke každé z nich vyrobíme zajímavý a užitečný výukový materiál.

Práce má celou řadu cílů a aspektů:

1. Studium nejrůznějších oblastí lineární algebry
   (a) Soustavy lineárních algebraických rovnic
   (b) Lineární geometrie
   (c) Vektorový prostor, báze, dimenze, souřadnice, podprostory
   (d) Lineární zobrazení
   (e) Vztah matic a lineárních zobrazení
   (f) Determinant
   (g) Vlastní čísla a vlastní vektory matic
   (h) Skalární součin a ortogonalita
2. Seznámení s historií lineární algebry
3. Programy pro řešení nejrůznějších úloh z lineární algebry (od historických způsobů až po ty nejmodernější)
4. Tvorba www stránky, která bude vhodným výukovým materiálem lineární algebry a bude obsahovat kromě srozumitelného učebního textu také programy ke všem popsaným algoritmům a historické i jiné zajímavosti