

Úvod do teorie náhodných matic

Bc. Martin Veselý

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra softwarového inženýrství v ekonomii
Skupina aplikované matematiky a stochastiky při katedře matematiky

2011

Obsah

- krátký exkurz do historie náhodných matic
- zavedení náhodných matic
- hermitovské náhodné matice - GOE, GUE, GSE
- vlastní čísla náhodných matic
- unfolding spektra a spacing distribution
- spektrální rigidita

Historie teorie náhodných matic

- 1930 – první zmínky o náhodných maticích, zůstávají na okraji zájmu
- 50. léta (Eugene Wigner) – užití náhodných matic v matematické fyzice při řešení úlohy na vlastní čísla hamiltoniánu jader těžkých prvků
- 1973 (Montgomery) – nalezení vazby mezi náhodnými maticemi a Riemannovou hypotézou
- 80. léta (Bohigas, Giannoni, Schmit) – objev spojení mezi náhodnými maticemi a teorií chaosu, aplikace v mnoha oborech, např. ekonomii, biologii, dopravě...

Zavedení náhodných matic

- náhodnou maticí míníme libovolnou matici, jejíž prvky jsou náhodná čísla
- dále budeme uvažovat pouze čtvercové matice, zajímají nás totiž spektra matic
- prvky většinou uvažujeme gaussovsky rozdělené (standardní Gaussovo rozdělení)
- většina poznatků o náhodných maticích je platná pouze pro matice velkých rozměrů
- pokud na strukturu matice neklademe žádné speciální nároky, hovoříme o tzv. **obecných maticích**

Hermitovské náhodné matice

matice třídy GOE (Gaussian orthogonal ensemble):

- jde o reálné symetrické matice
- pro rozdělení prvků platí:
 - $\forall i \in \hat{n} : a_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2)$
 - $i \neq j : a_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- pokud $\mathbf{A} \in \text{GOE}$, $\mathbf{U}$ je ortogonální, pak $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \in \text{GOE}$

matice třídy GUE (Gaussian unitary ensemble):

- jedná se o komplexní hermitovské matice
- reálné části prvků mají stejné rozdělení jako prvky matic GOE
- imaginární části mimodiagonálních prvků mají stejné rozdělení jako jejich reálné části
- pokud $\mathbf{A} \in \text{GUE}$, $\mathbf{U}$ je unitární, pak $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \in \text{GUE}$

Hermitovské náhodné matice

matice třídy GSE (Gaussian symplectic ensemble):

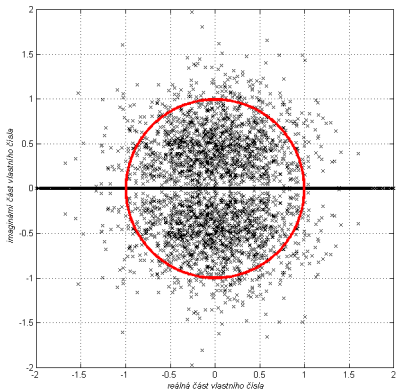
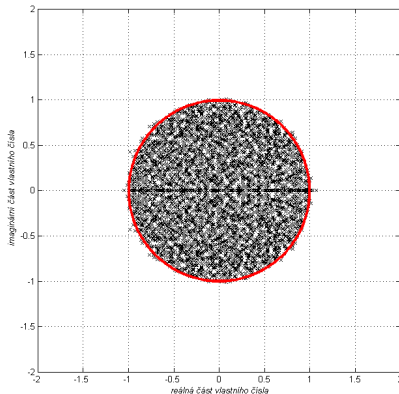
- jde o kvaternionové hermitovské matice sudého řádu
- pro rozdělení reálných částí prvků platí stejná pravidla jako pro GOE
- imaginární části mimodiag. prvků podléhají stejnému rozdělení jako části reálné
- pokud $\mathbf{A} \in \text{GSE}$, $\mathbf{S}$ je symplektická, pak $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \in \text{GSE}$
- pozn. $\mathbf{S}$ je symplektická, pokud $\mathbf{S}^T\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je antisymetrická regulární matice
- každá hermitovská náhodná matice je charakterizována parametrem β , jež popisuje její spektrální vlastnosti
 - GOE - $\beta = 1$
 - GUE - $\beta = 2$
 - GSE - $\beta = 4$

Vlastní čísla obecných náhodných matic - Girkův zákon

- uvažme obecnou matici řádu n s prvky z rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$
- určíme její vlastní čísla a tato normalizujeme hodnotou $\sqrt{n}$
- vlastní čísla budou obecně komplexní
- s rostoucí hodnotou řádu matice se vlastní čísla "stahují" do jednotkového kruhu se středem v počátku komplexní roviny
- normalizovaná vlastní čísla jsou v tomto kruhu rovnoměrně rozložena
- hustota pravděpodobnosti normalizovaných vlastních čísel je tedy dána vztahem

$$f(\lambda) = \theta(1 - |\lambda|) \frac{1}{\pi}$$

Girkův kruhový zákon - numerická simulace

 $n = 2$  $n = 500$

Vlastní čísla herm. náhodných matic - Wignerův zákon

- vlastní čísla hermitovských matic (s prvky z $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$) jsou reálná
- rozdělení vlastních čísel hermitovských náhodných matic je popsáno tzv. **Wignerovým polokruhovým zákonem**
- v případě matic z tříd GOE, GUE a GSE platí

$$f(\lambda) = \theta(\rho(\mathbf{A}) - |\lambda|) C \sqrt{\rho(\mathbf{A})^2 - \lambda^2},$$

kde $\rho(\mathbf{A})$ je spektrální poloměr matic a C je normalizační konstanta

$$C = \frac{2}{\pi \rho^2(\mathbf{A})}$$

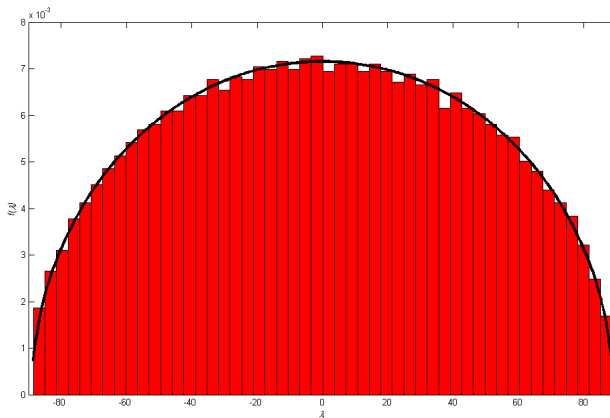
- spektrální poloměr je dán vztahem

$$\rho \approx k \sqrt{n},$$

kde $k = 2, 3, 4$ pro GOE, GUE a GSE, v uvedeném pořadí

Wignerův polokruhový zákon - numerická simulace

- příklad rozdělení vlastních čísel matic třídy GSE řádu 500



Unfolding a jednoduchý unfolding spektra

- unfoldingem míníme proces, při kterém je veličina s libovolným rozdělením přetransformována tak, aby vykazovala rozdělení rovnoměrné
- unfolding převádí spektrum rozdělené dle Wignerova zákona na spektrum s rovnoměrně rozdělenými prvky
- během unfoldingu se evidentně vytrácí informace o spektru, neboť rovnoměrné rozdělení má mezi všemi rozděleními na konečném intervalu největší entropii
- existuje několik možností, jak provést unfolding
- v případě unfoldingu spekter hermitovských matic stačí spektrum oříznout, tj. zanedbáme vlastní čísla jež přesahují určitou hodnotu (např. 50% spektrálního poloměru)
- opět dochází ke ztrátě informace díky zanedbání

Vzdálenost uspořádaných vlastních čísel

- vlastní čísla hermitovských náhodných matic jsou reálná, lze je tedy uspořádat
- dále je možné určit rozdíly po sobě jdoucích vlastních čísel
- vlastní čísla jsou náhodné veličiny, jejich rozdíly jsou také náhodnou veličinou s určitým rozdělením (tzv. **spacing distribution**)
- není známa přesná podoba hustoty pravděpodobnosti zmíněné veličiny, ale pouze více či méně kvalitní odhady
- průběh hustoty pravděpodobnosti závisí na třídě, do které daná matice náleží

Aproximace hustoty pravděpodobnosti spacing distribution

- přehled aproximací hustoty pravděpodobnosti uspořádaných vlastních čísel hermitovských matic
 - Wignerova domněnka (1958):

$$f_{\text{Wig}}(r) \approx \theta(r) A r^{\beta} e^{-B r^2}$$

- Izrailevova formule (1988):

$$f_{\text{Iz}}(r) \approx \theta(r) A \left(\frac{\pi r}{2} \right)^{\beta} e^{-\frac{\beta \pi^2}{16} r^2 - \left(B - \frac{\beta \pi}{4} \right) r}$$

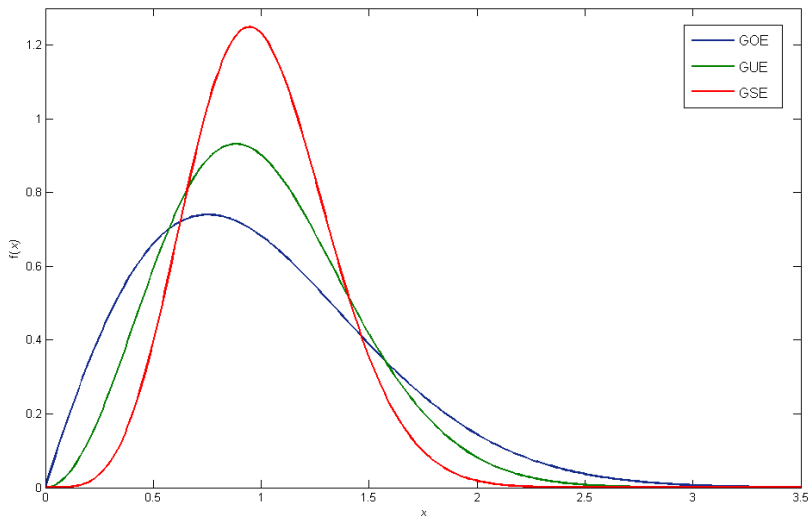
- Izrailev - Casati - Molinariho rozdělení (1991):

$$f_{\text{ICM}}(r) \approx \theta(r) A r^{\beta} (1 + B \beta r)^{g(\beta)} e^{-\frac{\beta \pi^2}{16} r^2 - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) r},$$

kde

$$g(\beta) = \frac{2^{\beta}}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \beta \right) - 0,16874$$

Izrailevova formule pro GOE, GUE a GSE



Spektrální rigidita - základní definice a vztahy

- mějme unfoldovaná vlastní čísla náhodné hermitovské matice, normalizujme je tak, aby střední hodnota jejich vzdálenosti byla rovna jedné
- dále je umístíme na reálnou osu
- vezměme vždy interval délky L a určíme počet vlastních čísel, jež se na tomto intervalu nacházejí (interval postupně "pokládáme" na reálnou osu od nejmenšího vlastního čísla až po největší)
- jelikož vlastní čísla jsou náhodná, je také jejich počet na daném intervalu náhodná veličina (ozn. $n(L)$)
- platí, že střední hodnota $n(L)$ je rovna L , neboť střední vzdálenost vlastních čísel je 1

Spektrální rigidita - základní definice a vztahy

- rozptyl veličiny $n(L)$ nazveme **spektrální rigiditou** (ve starší literatuře číselný rozptyl, number variance) a označíme $\Delta(L)$
- je zřejmé, že spektrální rigidita dobře popisuje spektrum matice
 - čím větší je hodnota $\Delta(L)$ tím, větší je také rozptyl vlastních čísel
 - dále s rostoucí $\Delta(L)$ roste také kolísání vzdálenosti vlastních čísel
 - hodnota spektrální rigidity se odvíjí od hodnoty parametru β jež popisuje danou matici

Spektrální rigidita matic GOE, GUE a GSE

- zaved'eme Eulerovu konstantu $\gamma = 0,57721$
- spektrální rigidita matic tříd GOE, GUE a GSE
 - třída GOE:

$$\Delta_{\text{GOE}}(L) \approx \frac{2}{\pi^2} \left(\ln(2\pi L) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8} \right)$$

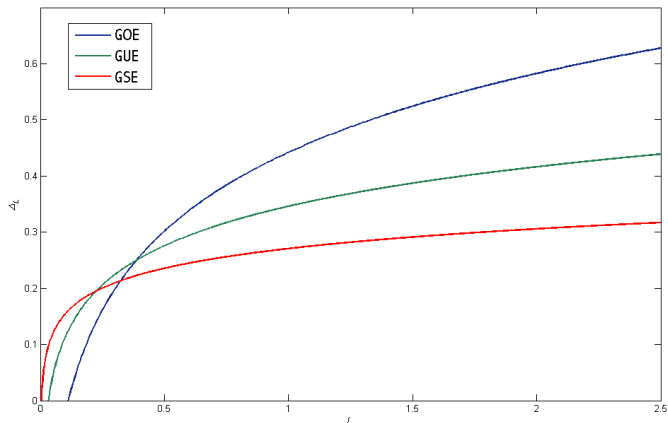
- třída GUE:

$$\Delta_{\text{GUE}}(L) \approx \frac{1}{\pi^2} (\ln(2\pi L) + \gamma + 1)$$

- třída GSE:

$$\Delta_{\text{GSE}}(L) \approx \frac{1}{2\pi^2} \left(\ln(4\pi L) + \gamma + 1 + \frac{\pi}{8} \right)$$

Spektrální rigidita matic GOE, GUE a GSE



- z grafů je zřejmé, že uvedené vztahy lze použít pouze pro $L > 1$, neboť pro malé hodnoty předpovídají záporný rozptyl!

Poděkování

Děkuji za pozornost!

