

Letní škola a workshop

Algebraické struktury

Telč 11. – 16. srpna 2008

Seznam účastníků

Petr Ambrož	<code>petr.ambroz@fjfi.cvut.cz</code>
Peter Baláži	<code>peter_balazi@centrum.cz</code>
Ľubomíra Balková	<code>l.balkova@centrum.cz</code>
Daniel Dombek	<code>D.Dombek@seznam.cz</code>
Lenka Háková	<code>l.hakova@sh.cvut.cz</code>
Jitka Hanousková	<code>jitka.meier@centrum.cz</code>
Karel Klouda	<code>kkarel@centrum.cz</code>
Petra Kocábová	<code>petra.kocabova@centrum.cz</code>
Milan Krbálek	<code>krbalek@fjfi.cvut.cz</code>
Dominik Macáš	<code>dominikbnp@seznam.cz</code>
Zuzana Masáková	<code>masakova@km1.fjfi.cvut.cz</code>
Angela Mestre	<code>mestrang@kmlinux.fjfi.cvut.cz</code>
Edita Pelantová	<code>pelantova@km1.fjfi.cvut.cz</code>
Severin Pošta	<code>severin@km1.fjfi.cvut.cz</code>
Štěpán Starosta	<code>sstarosta@seznam.cz</code>
Milena Svobodová	<code>milenasvobodova@volny.cz</code>
Ondřej Turek	<code>oturek@centrum.cz</code>

Program

pondělí 11. srpna	
9 ⁴⁵ – 10 ⁰⁰	zahájení workshopu
10 ⁰⁰ – 11 ⁰⁰	E. Pelantová <i>Powers in Words I</i>
11 ⁰⁰ – 11 ³⁰	Coffee break
11 ³⁰ – 12 ³⁰	P. Ambrož <i>3 Interval Exchange Transformation I – Základní vlastnosti</i>
12 ³⁰ – 13 ⁴⁵	Oběd
13 ⁴⁵ – 14 ²⁰	O. Turek <i>Balance Properties of Infinite Words Associated with Quadratic Pisot Numbers</i>
14 ³⁰ – 17 ³⁰	práce na projektech
úterý 12. srpna	
9 ⁰⁰ – 10 ⁰⁰	E. Pelantová <i>Powers in Words II</i>
10 ⁰⁰ – 10 ³⁰	Coffee break
10 ³⁰ – 11 ³⁰	P. Ambrož <i>3 Interval Exchange Transformation II – Morfizmy a matice</i>
11 ⁴⁰ – 12 ¹⁵	D. Macáš <i>Palindromicita číselných soustav s neceločíselným základem</i>
12 ¹⁵ – 13 ⁴⁵	Oběd
13 ⁴⁵ – 14 ²⁰	S. Pošta <i>Basics of Pólya's Theory of Enumeration</i>
14 ³⁰ – 17 ³⁰	práce na projektech
středa 13. srpna	
9 ⁰⁰ – 10 ⁰⁰	Z. Masáková <i>Multidimensional Continued Fractions I</i>
10 ⁰⁰ – 10 ³⁰	Coffee break
10 ³⁰ – 11 ³⁰	Ľ. Balková <i>Schrödinger Operators & Combinatorics on Words I</i>
11 ⁴⁰ – 12 ¹⁵	P. Kocábová <i>Kvantová mechanika na násobně souvislých varietách</i>
12 ¹⁵ – 13 ⁴⁵	Oběd

čtvrtek 14. srpna

$9^{00} - 10^{00}$	Z. Masáková <i>Multidimensional Continued Fractions II</i>
$10^{00} - 10^{30}$	Coffee break
$10^{30} - 11^{30}$	L. Balková <i>Schrödinger Operators & Combinatorics on Words II</i>
$11^{40} - 12^{15}$	D. Dombek <i>Poziční numerální systémy s rozšířenou abecedou</i>
$11^{45} - 13^{15}$	Oběd
$13^{45} - 14^{20}$	M. Krbálek <i>Kvantový chaos v dopravním proudu</i>
$14^{30} - 17^{30}$	práce na projektech

pátek 15. srpna

$9^{00} - 10^{00}$	Z. Masáková <i>Multidimensional Continued Fractions III</i>
$10^{00} - 10^{30}$	Coffee break
$10^{30} - 11^{30}$	K. Klouda <i>Faktorová komplexita pevných bodů substitucí</i>
$11^{40} - 12^{15}$	A. Mestre <i>Some Classic Problems in Graph Theory</i>
$11^{45} - 13^{15}$	Oběd
$13^{45} - 14^{45}$	Š. Starosta <i>Pisot Substitutions and Rauzy Fractals</i>
14^{45}	zakočení konference

Abstracts

P. Ambrož: *3 Interval Exchange Transformation I – Základní vlastnosti*

Slova kódující transformaci výměny tří intervalů (tzv. 3iet slova) jsou jedním z možných rozšíření nejjednodušších aperiodických (binárních) slov — Sturmovských slov — na slova nad větší abecedou. Zavedeme tato slova a postupně probereme všechny jejich dosud vyzkoumané kombinatorické charakteristiky.

P. Ambrož: *3 Interval Exchange Transformation II – Morfizmy a matice*

V této přednášce se budeme zabývat morfizmy, které zachovávají třídu 3iet slov, a morfizmy, které mají 3iet slova za pevný bod. Na rozdíl od případu morfizmů na Sturmovských slovech není ani jedna z těchto tříd plně popsána. Nejprve představíme známé výsledky o Sturmovských morfizmech, poté shrneme jak možnosti přenesení těchto výsledků na 3iet slova tak i všechny dosavadní výsledky v tomto směru získané.

Ľ. Balková: *Schrödinger Operators & Combinatorics on Words I & II*

We introduce discrete Schrödinger operators with potentials generated by primitive substitutions. Known spectral properties of such operators are recalled. We point out that the point spectrum is expected to be empty. The main aim of the talk is to describe in details how combinatorial properties of fixed points of substitutions reveal the absence of eigenvalues of the corresponding Schrödinger operators.

D. Dombek: *Poziční numerální systémy s rozšířenou abecedou*

Budeme se zabývat dvojkovou soustavou na rozšířené abecedě $\{0, 1, 2\}$. Úvodem poukážeme na zajímavou souvislost mezi nejednoznačností zápisu s touto abecedou a generováním racionálních čísel pomocí jisté celočíselné posloupnosti. Poté probereme použití upraveného hladového algoritmu pro α -rozvoj (α -greedy expansion) a dojdeme k nerekurentnímu vzorci pro výpočet cifer. Krátce zmíníme obecnější podobu formule pro četnost cifer, a nakonec předvedeme použití automatů pro převod ze standardní dvojkové soustavy do dvojkové s rozšířenou abecedou.

K. Klouda: *Faktorová komplexita pevných bodů substitucí*

Na začátku prezentace projdeme základní pojmy, definujeme si co je substituce a jaké důležité druhy substitucí rozeznáváme. Ukážeme si, co je pevný bod substituce a také jak je možné tento pojem zobecnit na tzv. periodický bod. Vyslovíme a dokážeme větu, která nám pomůže snadno určit počet periodických bodů libovolné substituce. Dále si předvedeme na několika konkrétních a známých příkladech substitucí jak spočítat faktorovou komplexitu pevného a tedy i periodického bodu primitivní substituce metodou využívající levých speciálních faktorů. Na závěr si stručně projdeme historický vývoj této metody.

O. Kocábová: *Kvantová mechanika na násobně souvislých varietách*

Diskutujeme rozklad levé regulární reprezentace na ireducibilní reprezentace. Tento rozklad lze vytvořit pomocí von Neumannova direktního integrálu. Pokud provedeme tento rozklad vzhledem k centru algebry generované levou regulární reprezentací, lze zformulovat zobecněnou Peter-Weyl Plancherelovu větu. Dále ukážeme, že Blochova analýza může být zobecněna na souvislé a lokálně lineárně souvislé variety s fundamentální grupou Typu I. V případě násobně souvislých variet, Schulmannův ansatz se používá k odvození jádra propagátoru v prostoru ekvivariantních funkcí. Při platnosti předchozích předpokladů diskutujeme a dokážeme platnost Schulmannova ansatzu.

M. Krbálek: *Kvantový chaos v dopravním proudu*

Systematické zkoumání zákonitostí dopravních systémů je v současné době velice rozšířenou vědeckou aktivitou. Motivaci k prováděnému výzkumu lze nalézt ve snaze vytvořit funkční dopravní modely a pomocí nich pak optimalizovat reálné dopravní situace. Zatímco se většina existujících studií zabývá formulací tzv. makroskopických modelů pracujících na bázi dynamiky tekutin, některé novější studie přistupují k popisu dopravního vzorku na mikroskopické úrovni, tj. modelují jednotlivá vozidla a vzájemné interakce mezi nimi. Tyto modely užívají jako nástroj popisu termodynamickou fyziku, čili nahlíží na dopravní proud jako na částicový plyn umístěný v teplotní lázni o dané teplotě. Oba zmíněné přístupy, tj. makroskopický a mikroskopický, dávají poměrně jasnou představu o způsobech fungování dopravního systému. V přednášce populárně vysvětlíme základní matematické objekty, se kterými modely dopravního proudu pracují.

D. Macáš: *Palindromicita číselných soustav s neceločíselným základem*

Zavedeme pojem palindromického čísla, který není závislý na hodnotě celočíselné báze, ve které číslo zapisujeme. Popíšeme známé výsledky o hustotě palindromických čísel (výsledky Di Scaly a Sombra) a zmíníme otevřené otázky související s číselnými palindromy. Následně pojem palindromického čísla přeneseme do soustavy s neceločíselnou bází a budeme diskutovat změny ve vlastnostech.

Z. Masáková: *Multidimensional Continued Fractions I*

Abychom mohli algoritmus řetězových zlomků zobecnit na simultánní aproximaci $d \geq 2$ reálných čísel, zopakujeme nejprve definici a vlastnosti klasických řetězových zlomků. Zaměříme se zvláště na podmínky konečnosti a jednoznačnosti, na rekurenci pro sblížené zlomky a kvalitu aproximace reálného čísla jejich pomocí. Největší pozornost soustředíme na případ periodického řetězového zlomku, kde vyšetříme jeho souvislost s kvadratickými Pisotovými čísly.

Z. Masáková: *Multidimensional Continued Fractions II*

Podobně jako v jednorozměrném případě odpovídá algoritmus pro řetězový zlomek čísla $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eukleidovu algoritmu hledání největšího společného dělitele p a q , odvozuje se Jacobi-Perronův algoritmus pro simultánní aproximaci $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)}$ z algoritmu pro hledání největšího společného dělitele $d+1$ celých čísel. Budeme studovat podmínky tzv. “interupcí” v algoritmu, tj.

případů, kdy posloupnost d -tic koeficientů není nekonečná ve všech proměnných. Dokážeme dále lexikografickou podmínku na posloupnost koeficientů řetězového zlomku a pomocí d -rozměrných matic definujeme rekurenci zadávající d -tici racionálních čísel aproximující $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)}$. Vyslovíme větu o slabé konvergenci.

Z. Masáková: *Multidimensional Continued Fractions III*

Soustředíme se na případ, kdy výstupem Jacobi-Perronova algoritmu je periodická posloupnost d -tic koeficientů. Tehdy je vyšetřování různých vlastností multidimenzionálního řetězového zlomku zjednodušeno existencí tzv. charakteristické rovnice JPA. Lze proto vyslovit řadu číselněteoretických výsledků o interupcích algoritmu, o kvalitě aproximace sblíženými zlomky, apod. Překvapující je zvláště výjimečnost případu $d = 2$ a dále souvislost Jacobi-Perronova algoritmu s Pisotovými čísly a hledáním fundamentální jednotky v algebraických tělesech.

A. Mestre: *Some classic problems in graph theory*

We review four classic problems in graph theory, namely, the Königsberg bridge problem, the Icosian game, the four-colour theorem, and Ulam's conjecture (or reconstruction conjecture). We give the historical context of each of these problems as well as some illustrations.

E. Pelantová: *Powers in Words I & II*

Delone set with finite local complexity are suitable models for modelling of materials with aperiodic long range order, so called quasicrystals. Classical crystals are solid materials formed by arbitrarily long periodic repetition of unique motif. This property does not occur in quasicrystals. Here we are interested in maximal possible repetition in two types of most popular models for quasicrystals: one dimensional cut-and-project sets and β -integers. Combinatorics on words is the most powerful tool for study repetition.

In the first lecture, we concentrate on sturmian words, i.e., on words coding tiles in one-dimensional cut-and-project sets. We put into relation the index of an infinite aperiodic word and its recurrence function. With the use of this relation, we then give a new characterization of Sturmian words. As a byproduct, we give a new proof of theorem of Damanik and Lenz describing the index of a Sturmian word in terms of the continued fraction expansion of its slope.

In the second lecture we will describe repetitions in β -integers associated with non-simple Parry numbers. Words u_β coding distances between consecutive β -integers are generated by a primitive substitution. These words are described by couple of integer parameters p, q , where $p > q \geq 1$. Since the crucial role for finding factors with maximal index is played by bispecial factors, we at first give the recursive formula for producing sufficiently long bispecial factor and then we provide an explicit formula for computing index of u_β

S. Pošta: *Basics of Pólya's Theory of Enumeration*

In combinatorial problems the evaluation of numbers of objects or configurations is often more complicated when certain configurations of given type are considered identical for some reason, for example by symmetry. In mathematical language we are given a finite non empty set X and a non-empty group G of bijection acting on X . Two objects $a, b \in X$ are considered to

be equivalent if $b = \varphi(a)$ for some bijection $\varphi \in G$. We prove the Burnside Lemma which evaluates number of equivalency classes and then we demonstrate strength of the Lemma on many examples.

Š. Starosta: *Pisot Substitutions and Rauzy Fractals*

We first define a Rauzy fractal associated to a primitive unimodular substitution of Pisot irreducible type. We introduce notions of linear maps associated to a substitution and their dual maps and show how one can use the duality to construct a Rauzy fractal. Finally we state a theorem which links the dynamical system generated by a specific substitution on d letters to a domain exchange in \mathbb{R}^{d-1} .

O. Turek: *Balance Properties of Infinite Words Associated with Quadratic Pisot Numbers*

We will deal with the balance properties of the infinite binary words associated to β -integers when β is a quadratic simple Pisot number. Those words are the fixed points of the morphisms of the type $\varphi(A) = A^p B$, $\varphi(B) = A^q$ for $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \geq q$, where $\beta = (p + \sqrt{p^2 + 4q})/2$. We will prove that such word is t -balanced with $t = 1 + [(p - 1)/(p + 1 - q)]$.